

OPTIMALNO UPRAVLJANJE

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet u Podgorici
Univerzitet Crne Gore

Tema 5

Slučajni signali i linearni sistemi

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- Definišu kontinualni i diskretni slučajni proces, njihovu očekivanu vrijednost, varijansu i autokorelacionu funkciju
- Odrede statističke karakteristike odziva linearnog vremenski-invarijantnog sistema na bijeli šum (srednju vrijednost i kovarijacionu matricu)
- Simuliraju na računaru odziv linearnog sistema na (pseudo)-bijeli šum

Formulacija problema

Posmatrajmo linearni i stacionarni sistem opisan u prostoru stanja na sljedeći način:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{M}\mathbf{w}(t) \quad (\text{jednačina stanja})$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (\text{jednačina mjerenja})$$

gdje su:

- $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ vektor stanja sistema
- $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ determinističkog ulaznog signala (poznati ulaz: upravljački signal)
- $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^q$ vektor nepoznatog slučajnog signala (šuma) čiji je uticaj na sistem opisan matricom $\mathbf{M}_{n \times q}$ ($\mathbf{w}_x = \mathbf{M}\mathbf{w}$ se naziva procesni šum).
- $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^p$ vektor mjenenog signala,
- $\mathbf{v}(t) \in \mathbf{R}^p$ vektor slučajnog signala (mjerni šum) koji se predstavlja grešku u mjerenjima (smatraćemo da je ovaj vektor istih dimenzija kao i vektor $\mathbf{y}(t)$).

Formulacija problema

Matrice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} i \mathbf{D} predstavljaju model sistema u prostoru stanja. Kao što je dobro poznato, matrica funkcija prenosa između signala $\mathbf{y}(t)$ i $\mathbf{u}(t)$ je jednaka:

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

dok je odziv sistema na upravljački signal $\mathbf{u}(t)$ na intervalu $t \in [t_0, t]$ i početne uslove $\mathbf{x}(t_0)$:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

Postavlja se pitanje čemu je jednak odziv sistema na slučajni signal $\mathbf{w}(t)$? Da bi odgovorili na ovo pitanje moramo:

- Definisati slučajni signal sa matematičke tačke gledišta,
- Napraviti neke pretpostavke o stohastičkim osobinama signala koje će olakšati određivanje odziva
- Odrediti stohastičke karakteristike odziva ($\mathbf{x}(t)$ i $\mathbf{y}(t)$)

Karakterizacija slučajnih promjenljivih

Neka je X slučajna promjenljiva definisana na jednodimenzionalnom realnom prostoru \mathbb{R} . Funkcija raspodjele $F(x)$ je funkcija koja za svaki realan broj x određuje vjerovatnoću da je slučajna promjenljiva X uzela vrijednost manju ili jednaku od x :

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0 \ 1] \quad / \quad F(x) = P[X \leq x].$$

Osobine:

- $\forall x_1 < x_2, P[x_1 < X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0;$
- $F(x)$ je monotono rastuća funkcija, a može biti kontinualna ili diskretna u zavisnosti od toga da li je slučajna promjenljiva X kontinualna ili diskretna.

Ako je $F(x)$ diferencijabilna tada se njen izvod po promjenljivoj x naziva *gustina raspodjele* i označava se sa $p(x)$:

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad \rightarrow \quad p(x)dx = P(x \leq X < x + dx).$$

Karakterizacija slučajnih promjenljivih

Za opisivanje slučajne promjenljive X koriste se takozvani momenti promjenljive. Prvi moment se naziva *srednja* ili *očekivana vrijednost* slučajne promjenljive. Drugi centralni moment se naziva *varijansa* i označava se sa $\text{var}_x = \sigma_x^2$, gdje je σ_x standardna devijacija.

U nastavku su date definicije momenata:

- Očekivana vrijednost:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x).$$

- k -ti moment:

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x)dx.$$

- k -ti centralni moment:

$$E[(X - E[X])^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^k p(x)dx.$$

Varijansa se može definisati i na sljedeći način:

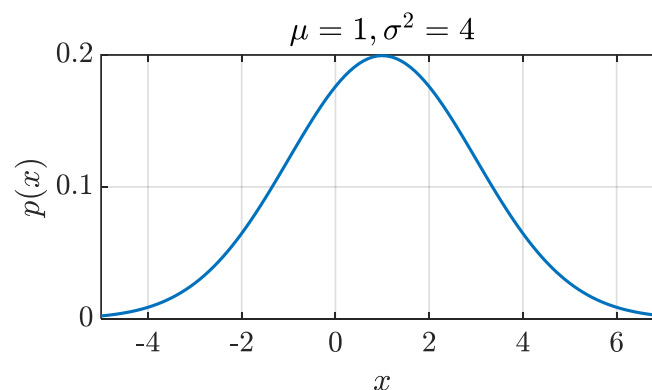
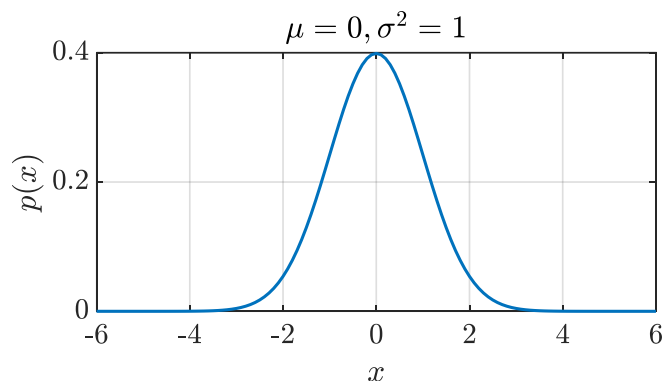
$$\text{var}_X = E[X^2] - E[X]^2.$$

Karakterizacija slučajnih promjenljivih

Da bi potpuno opisali neku slučajnu promjenljivu potrebno je poznavanje svih momenata. Sa praktičnog stanovišta treći i viši momenti se ne koriste, jer se ne mogu jednostavno izvesti ili izračunati.

Često je od interesa posmatrati **normalnu (Gausovu)** varijablu, koja se u potpunosti može opisati prvim i drugim momentom:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad E[x] = \mu, \quad E[(x - \mu)^2] = \sigma^2.$$



Kod Gausove raspodjele, vjerovatnoća da slučajna promjenljiva $X - \mu$ bude u opsegu $[-2\sigma, 2\sigma]$ iznosi 95%.

Diskretna slučajna promjenljiva

Ako se slučajna promjenljiva definisana na skupu od N različitih diskretnih vrijednosti x_i , $i=1, 2, \dots, N$, tada gustina raspodjele više nije potrebna za njeno opisivanje, već možemo direktno da zapišemo vjerovatnoću da je promjenljiva X uzela vrijednost x_i : $P(X=x_i)$.

Očekivana vrijednost i varijansa diskretne slučajne promjenljive se definišu na sljedeći način:

$$E[X] = \sum x_i P(X = x_i),$$
$$\text{var}_X = E\left[(X - E[X])^2\right] = \sum (x_i - E[X])^2 P(X = x_i).$$

Primjer:

Neka je X slučajna promjenljiva koja opisuje ishod bacanja kocke. Vjerovatnoća da dobijemo x_i iznosi:

$$P(X = x_i) = 1 / 6.$$

Lako se može pokazati da su srednja vrijednost i varijansa promjenljive X jednake:

$$E[X] = 3.5, \text{ var}_X = 2.91.$$

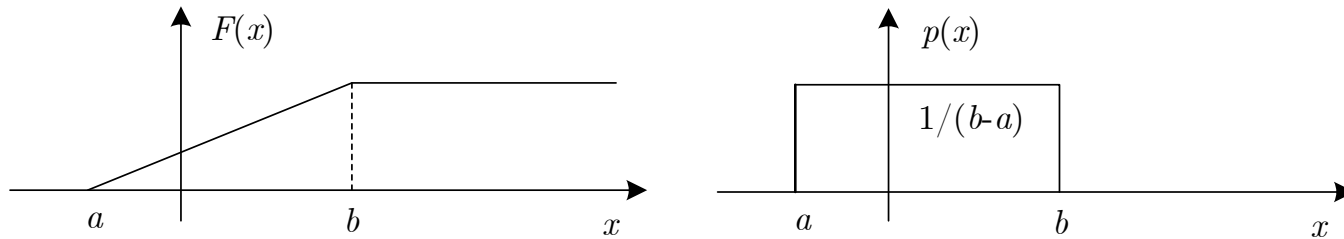
Primjer – unifiromna raspodjela

Kod uniformne raspodjele, gustina raspodjele promjenljive X je konstantna između a i b i iznosi $1/(b-a)$, pri čemu je $a < b$. Odnosno: $p(x) = 1/(b-a), a < x \leq b$.

Funkcija raspodjele je jednaka:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x)dx = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}.$$

Funkcija raspodjele i gustina raspodjele su prikazani na slici ispod.



Srednja vrijednost i varijansa su jednake:

$$E[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}.$$

$$\text{var}_X = E\left[(X - E[X])^2\right] = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Višedimenzionalna slučajna promjenljiva

Neka je $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_q]$ vektor od q slučajnih promjenjivih definisan na \mathbb{R}^q . Funkcija raspodjele vektorske slučajne promjenljive se definiše na sljedeći način:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_q) = P[X_1 < x_1 \text{ i } X_2 < x_2 \text{ i } \dots \text{ i } X_q < x_q],$$

dok je gustina raspodjele:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_q) = \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_q)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_q}.$$

Definicija momenata

- Očekivana vrijednost varijable \mathbf{X} se definiše na sljedeći način:

$$E[\mathbf{X}] = [E[X_1], \dots, E[X_q]]^T.$$

- Kovarijaciona matrica Cov_X je jednaka:

$$\text{Cov}_X = E[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])^T],$$

gdje je element ove matrice na poziciji (i, j) jednak:

$$\text{Cov}_X(i, j) = \int_{\mathbb{R}^2} (x_i - E[X_i])(x_j - E[X_j])dF(x_i, x_j)$$

Višedimenzionalna slučajna promjenljiva

Gausova raspodjela

Gustina raspodjele Gausovog slučajnog vektora \mathbf{X} srednje vrijednosti μ i kovarijacione matrice Δ se definiše na sljedeći način:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{q/2} \sqrt{\Delta}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Delta (\mathbf{x}-\mu)}.$$

Ovaj vektor se može dobiti i iz normalnog Gausovog vektora \mathbf{N} ($\mu=0$, $\Delta=\mathbf{I}$) na sljedeći način:

$$\mathbf{X} = \mu + \mathbf{N}\mathbf{G}, \quad \mathbf{G}\mathbf{G}^T = \Delta.$$

Nezavisnost:

Dvije slučajne promjenljive X_1 i X_2 su statistički nezavisne ako i samo ako važi:

$$F(X_1 X_2) = F(X_1)F(X_2).$$

Iz gornjeg uslova proizilazi sljedeća osobina:

$$E[X_1 X_2] = E[X_1]E[X_2].$$

Primjer – vektorska slučajna promjenljiva

Posmatrajmo dvije slučajne promjenljive X_1 i X_2 sa uniformnom gustinom raspodjele na intervalu $[-1, 1]$. Neka je promjenljiva Y definisana na sljedeći način $Y=(X_1+X_2)/2$. Izračunati $E[Y]$, var_Y i kovarijacionu matricu $\text{Cov}_{X_1, Y}$ vektora $[X_1 \ Y]^T$.

Kako se radi o unifromanoj raspodjeli, na osnovu primjera 1, za $b=1$ i $a=-1$, slijedi:

$$E[X_1] = \frac{b+a}{2} = 0, \quad E[X_2] = 0, \quad \text{var}_{X_1} = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3}, \quad \text{var}_{X_2} = \frac{1}{3}.$$

Dalje, promjenljiva $Y=(X_1+X_2)/2$ se može zapisati u vektorskom obliku:

$$Y = [0.5 \quad 0.5] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \rightarrow E[Y] = [0.5 \quad 0.5] \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \end{bmatrix} = [0.5 \quad 0.5] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Varijansa promjenljive Y je jednaka:

$$\begin{aligned} \text{var}_Y &= E[YY^T] = [0.5 \quad 0.5] E \left[\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \\ &= [0.5 \quad 0.5] \begin{bmatrix} E[X_1X_1] & E[X_1X_2] \\ E[X_2X_1] & E[X_2X_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = [0.5 \quad 0.5] \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Primjer – vektorska slučajna promjenljiva

Kovarijaciona matrica $\text{Cov}_{X_1, Y}$ vektora $[X_1 \ Y]^T$ je po definiciji:

$$\text{Cov}_{X_1, Y} = E \left[\begin{bmatrix} X_1 \\ Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} E[X_1 X_1] & E[X_1 Y_1] \\ E[Y_1 X_1] & E[Y_1 Y_1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Elementi prethodne matrice su jednaki:

$$\begin{aligned} \text{Cov}_{X_1, Y}(1,1) &= E[X_1 X_1] = \text{var}_{X_1} = \frac{1}{3} & \text{Cov}_{X_1, Y}(2,1) &= \text{Cov}_{X_1, Y}(1,2) = E[X_1 \cdot (0.5X_1 + 0.5X_2)] \\ \text{Cov}_{X_1, Y}(2,2) &= E[YY] = \text{var}_Y = \frac{1}{6} & &= 0.5E[X_1 X_1] + 0.5[X_1 X_2] = 0.5 \text{var}_{X_1} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Napomena: Moguće je odrediti i funkciju raspodjele promjenljive Y :

$$F(y) = P(Y < y) = P\left(\frac{X_1 + X_2}{2} < y\right) = P(X_1 < 2y - X_2) = \int_{D_{x_2}} P(X_1 < 2y - X_2) p(x_2) dx_2.$$

Nakon određivanja ovog integrala određuje se gustina raspodjele $p(y)$:

$$p(y) = \frac{dF(y)}{dy},$$

a na osnovu nje se dalje može odrediti očekivana vrijednost i varijansa promjenljive Y .

Slučajni procesi

Za zadatu slučajnu promjenljivu X , slučajni signal $x(t)$ predstavlja vremenski promjenljivu funkciju čija vrijednost u trenutku t korespondira nekoj vrijednosti (odbirku) promjenljive X .

Momenti slučajnog signala:

Za zadati slučajni signal $w(t)$ prvi moment (srednja vrijednost) i drugi moment (autokorelaciona funkcija) se definišu na sljedeći način:

$$\mu(t) = E[w(t)],$$

$$r(t, \tau) = E[w(t)w(t + \tau)].$$

Ako je $\mathbf{w}(t)$ vektorska funkcija od q komponenti, tada se:

$$\mathbf{R}(t, \tau) = E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}(t + \tau)^T]$$

naziva autokorelaciona matrica. Dijagonalni elementi ove matrice predstavljaju autokorelacione funkcije svake komponente, dok vandijagonalni elementi predstavljaju kros-korelacione funkcije između odgovarajućih signala:

$$r(t, \tau)_{i,j} = E[w_i(t)w_j(t + \tau)].$$

Slučajni procesi

Stacionarnost:

Slučajni signal je stacionaran u širem smislu ako je njegova srednja vrijednost konstantna ($\mu(t) = \mu$) i ukoliko autokorelaciona funkcija zavisi samo od τ ($r(t, \tau) = r(\tau)$). Varijansa stacionarnog slučajnog signala se definiše kao vrijednost autokorelacione funkcije za $\tau=0$:

$$\sigma_{w(t)}^2 = r(0).$$

Bijeli šum:

Bijelim šumom se naziva slučajni signal beskonačne varijanse. Autokorelaciona funkcija bijelog šuma je proporcionalna dirakovom impulsu, odnosno u slučaju vektorskog signala, autokorelaciona funkcija je jednaka:

$$\mathbf{R}(t, \tau) = E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}(t + \tau)^T] = \mathbf{W}(t)\delta(t)$$

Spektralna gustina snage bijelog šuma se definiše kao Furijeova transformacija autokorelacione funkcije i ona iznosi:

$$P(w) = \mathbf{W}.$$

Slučajni procesi

Diskretni slučajni signal $x(n)$ predstavlja sekvencu slučajnih varijabli. Za diskretni slučajni signal važe sljedeće definicije:

Očekivana vrijednost: $m(n) = E[x(n)]$

Autokorelaciona funkcija: $r(n, k) = E[w(n)w(n+k)]$

Stacionarnost: $m(n) = m$, $r(n, k) = r(k)$

Varijansa: $\sigma_w^2 = r(0)$.

Bijeli šum: predstavlja signal kome su odbirci generišu pomoću Gausove raspodjele, na takav način da su svi odbirci međusobno nezavisni. Za diskretni bijeli šum važi:

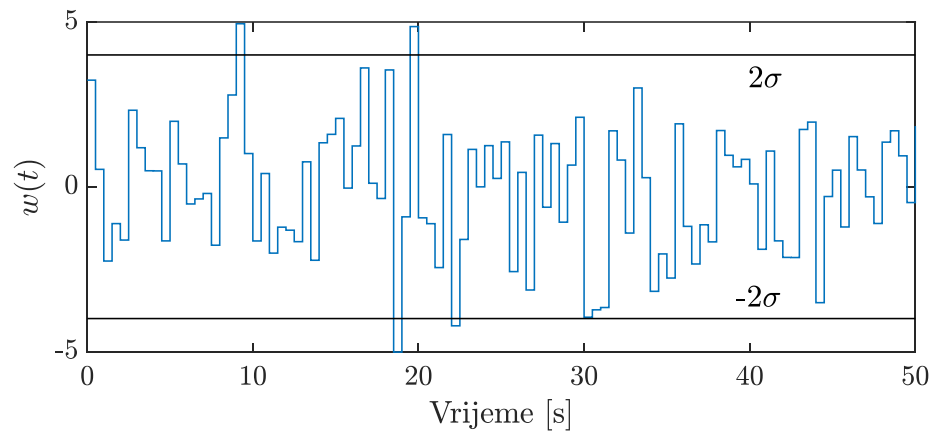
$$\mathbf{R}(n, k) = E[\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n+k)^T] = \mathbf{W}(n)\delta(n)$$

Spektralna gustina snage stacionarnog ($W(n) = W$), diskretnog bijelog šuma je konstantna i iznosi W .

Primjer – pseudo-bijeli šum

Slučajni signal $w(t)$ se generiše na sljedeći način: $w(t) = x_i \forall t \in [idt, (i + 1)dt]$, gdje je x_i odbirak Gausove slučajne promjenljive X , srednje vrijednosti 0 i varijanse σ^2 . Svi odbirci (uzorci) x_i promjenljive X su nezavisni jedni od drugih. Odrediti srednju vrijednost i varijansu signala $w(t)$.

Primjer realizacije signala $w(t)$ za $\sigma=2$ je prikazan na slici ispod.



Srednja vrijednost signala $w(t)$ je: $m(t) = E[w(t)] = 0$.

Autokorelaciona funkcija signala $w(t)$ je jednaka

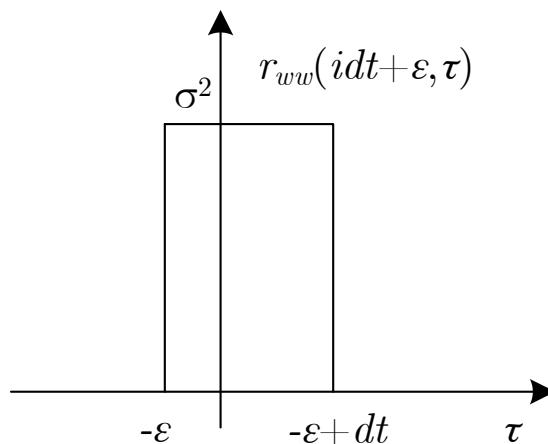
$$r_{ww}(t, \tau) = E[w(t)w(t + \tau)^T] = \sigma^2,$$

ukoliko se t i τ nalaze u okviru istog vremenskog intervala dt . U suprotnom ona je jednaka 0, jer su odbirci $w(t)$ i $w(t + \tau)$ nezavisni i centrirani.

Primjer – pseudo-bijeli šum

Autokorelaciona funkcija $r_{ww}(t, \tau)$ zavisi i od t i τ , što znači da signal $w(t)$ nije stacionaran.

Na primjer, za $t = idt + \varepsilon$ ($\forall i, \forall \varepsilon [0, dt]$) autokorelaciona funkcija je skicirana na slici ispod.



Sa praktične tačke gledišta na računaru nije moguće realizovati bijeli šum čija je spektralna gustina snage \mathbf{R} (beskonačna varijansa). Aproksimacija bijelog šuma se naziva pseudo-bijeli šum i on se realizuje upravo na način opisan u ovom primjeru. U toku svakog intervala $[idt, (i + 1)dt]$ treba generisati Gausovu slučajnu promjenljivu varijanse σ^2/dt . Ova aproksimacija odgovara bloku „Band-limited white noise“ u Simulink-u.

Prenos slučajnih signala kroz linearne sisteme

Ako pretpostavimo da je linearni sistem pobuđen bijelim Gausovim šumom, tada će stanje sistema $\mathbf{x}(t)$ i njegov izlaz $\mathbf{y}(t)$ takođe biti Gausove promjenljive, koje se mogu potpuno okarakterisati prvim i drugim momentom.

Teorema: Neka je linearni sistem zadat sa:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{M}\mathbf{w}(t),$$

gdje je $\mathbf{w}(t)$ vektor centriranog bijelog Gausovog šuma varijanse \mathbf{Q} . Ako su $\mathbf{m}(t_0)$ i $\mathbf{P}(t_0)$ srednja vrijednost i kovarijaciona matrica početnog stanja $\mathbf{x}(t_0)$, tada je stanje $\mathbf{x}(t)$ Gausov slučajni signal čija je:

- srednja vrijednost

$$\mathbf{m}(t) = E[\mathbf{x}(t)] = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{m}(t_0),$$

- kovarijaciona matrica $\mathbf{P}(t) = E[(\mathbf{x}(t) - \mathbf{m}(t))(\mathbf{x}(t) - \mathbf{m}(t))^T]$ se dobija kao rješenje diferencijalne jednačine:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{M}\mathbf{Q}\mathbf{M}^T.$$

Prenos slučajnih signala kroz linearne sisteme

Ako je sistem stabilan, tada će kovarijaciona matrica $\mathbf{P}(t)$ konvergirati ka konstantnoj vrijednosti, odnosno možemo zapisati $\mathbf{P}(\infty)=\mathbf{P}$. Matricu \mathbf{P} možemo odrediti rješavanjem Ljapunove jednačine, koja se dobija uvštavanjem uslova $\dot{\mathbf{P}}=\mathbf{0}$ u diferencijalnu jednačinu kovarijacione matrice:

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{M}\mathbf{Q}\mathbf{M}^T = \mathbf{0}.$$

Napomena:

Ako posmatramo izlaznu jednačinu bez šuma:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

tada će kovarijaciona matrica izlaznog signala biti jednaka:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y}(t)} = \mathbf{C}\mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T.$$

Ako je izlaz zašumljen - $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$, tada njegova kovarijaciona matrica ima beskonačnu vrijednost.

Dokaz prve osobine Teoreme je dat u nastavku, dok je dokaz druge osobine izostavljen.

Prenos slučajnih signala kroz linearne sisteme

Dokaz prve osobine Teoreme:

Odziv sistema na bilo koji signal $\mathbf{w}(t)$ je:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{M} \mathbf{w}(\tau) d\tau.$$

Srednja vrijednost signala $\mathbf{x}(t)$ je:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(t) &= E[\mathbf{x}(t)] = E \left[e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{M} \mathbf{w}(\tau) d\tau \right]. \\ &= e^{\mathbf{A}(t-t_0)} E[\mathbf{x}(t_0)] + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{M} E[\mathbf{w}(\tau)] d\tau = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} E[\mathbf{x}(t_0)]. \end{aligned}$$

Kako je $\mathbf{w}(t)$ centrirani slučajni signal (srednje vrijednosti $\mathbf{0}$), iz prethodne jednačine slijedi:

$$\mathbf{m}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} E[\mathbf{x}(t_0)],$$

što je i trebalo dokazati.

Prenos slučajnih signala kroz linearne sisteme

Posmatrajamo sada diskretni linearni sistem koji je pobuđen diskretnim bijelim šumom $\mathbf{w}_d(n)$ čija je autokorelacija $\mathbf{Q}_d \delta(n)$.

Teorema: Neka je linearni sistem zadat sa:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(n) + \mathbf{M} \mathbf{w}(n),$$

gdje je $\mathbf{w}_d(n)$ vektor centriranog bijelog Gausovog šuma varijanse \mathbf{Q}_d . Ako su $\mathbf{m}(n_0)$ i $\mathbf{P}(n_0)$ srednja vrijednost i kovarijaciona matrica početnog stanja $\mathbf{x}(n_0)$, tada je stanje $\mathbf{x}(n)$ Gausov slučajni signal čija je:

- srednja vrijednost

$$\mathbf{m}(n) = E[\mathbf{x}(n)] = \mathbf{A}_d^{(n-n_0)} \mathbf{m}(n_0),$$

- kovarijaciona matrica $\mathbf{P}(n) = E[(\mathbf{x}(n) - \mathbf{m}(n))(\mathbf{x}(n) - \mathbf{m}(n))^T]$ se dobija kao rješenje diferencne jednačine:

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{P}(n) \mathbf{A}_d^T + \mathbf{M}_d \mathbf{Q}_d \mathbf{M}_d^T.$$

U stacionarnom stanju važi jednakost (diskretna Ljapunova jednačina):

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}_d \mathbf{P} \mathbf{A}_d^T + \mathbf{M}_d \mathbf{Q}_d \mathbf{M}_d^T.$$

Primjer 1 – odziv sistema na bijeli šum

Sistem je zadat u prostoru stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -50 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t),$$
$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 10^2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t),$$

gdje je $w(t)$ bijeli Gausov šum varijanse $\delta(t)$.

U Simulinku simulirati i prikazati odziv sistema na pseudo-bijeli šum. Odrediti kovarijansu izlaznog signala. Razmotriti dvije periode odabiranja: $T=0.001s$ i $T=0.01s$.

Kovarijaciona matrica stanja u staciononarnom stanju se dobija rješavanjem Ljapunove jednačine:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -50 \end{bmatrix} \mathbf{P} + \mathbf{P} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -50 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}.$$

Rješenje gornje jednačine je:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{bmatrix}.$$

Primjer 1 – odziv sistema na bijeli šum

Ljapunova jednačina se u Matlab-u rješava pomoću komande `lyap(A, M*M')`, a moguće je i ručno riješiti pretvaranjem u vektorski oblik pomoću Kronekerovog operatora.

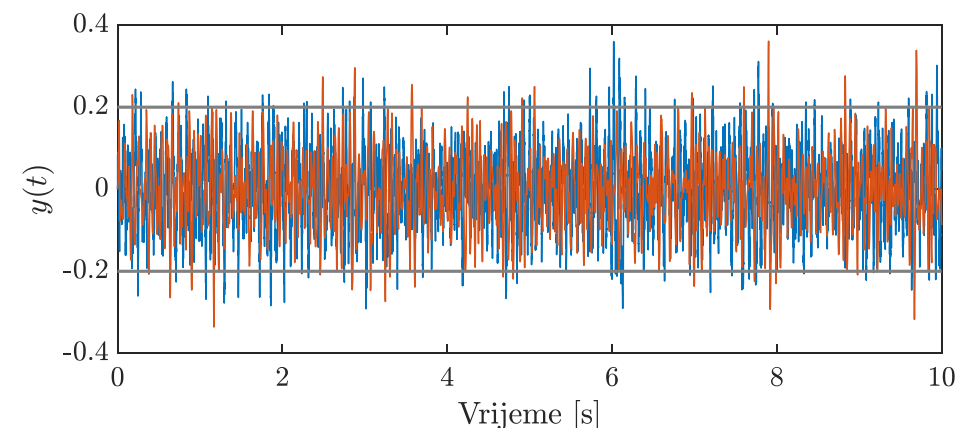
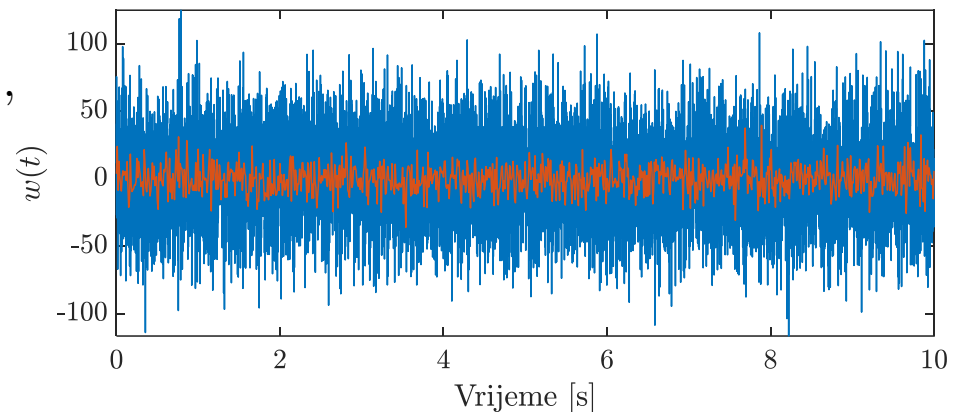
Varijansa izlaznog signala je:

$$\text{var}_y = \begin{bmatrix} 10^2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{P} \begin{bmatrix} 10^2 & -1 \end{bmatrix}^T = 0.0101,$$

dok je standardna devijacija $\sigma=0.1$.

Na prvoj slici je prikazan pseudo-bijeli šum za $T=0.001$ i $T=0.01$. U prvom slučaju varijansa šuma iznosi $1/T=1000$, dok je u drugom slučaju njena vrijednost 100. Jasno, ako T teži nuli, tada će varijansa šuma težiti ka beskonačnosti.

Na drugoj slici je prikazan odziv diskretizovanog sistema na zadate šumove. Može se uočiti da je u oba slučaja varijansa filtriranog šuma približno jednaka 0.01.



Primjer 1 – odziv sistema na bijeli šum

```
% clear all
close all
A=[0 1;-1 -2]; B=[1;0];M=[1;0];C=[1 0];
Q=0.1;
%%
dt=0.1;
ss1=ss(A,B,C,0);
ssd=c2d(ss1,dt);
Ad=ssd.A;Bd=ssd.B;Cd=C;Md=eye(2);
Rd=1/dt;
Qd1=dt*M*Q*M';
syms v; Qd=eval(int(expm(A*v)*M*Q*M'*expm(A'*v),0,dt));
tf=100;
x(:,1)=[0;0];
for n=1:tf/dt
    x(:,n+1)=Ad*x(:,n)+Bd*1+chol(Qd)*randn(2,1);
    y(n)=Cd*x(:,n);
end
t=[0:tf/dt-dt]*dt;
plot(t,y)
```